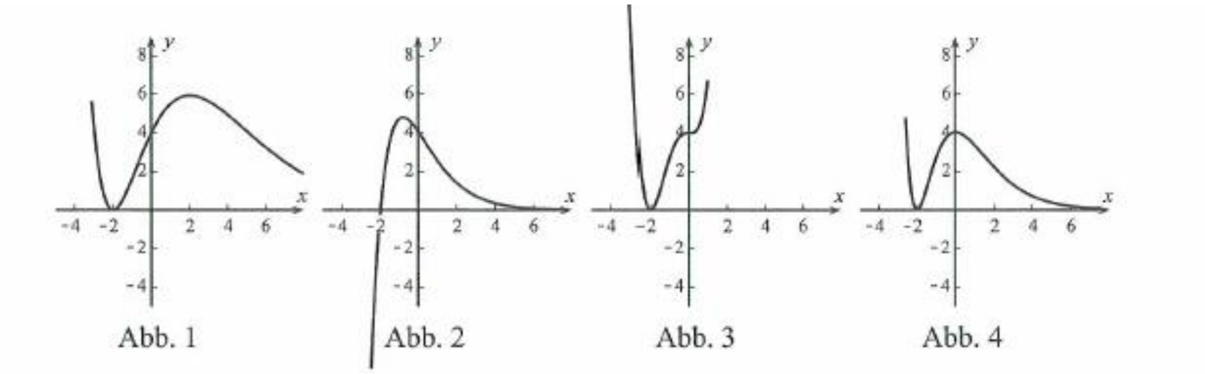
Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x + 2)^2 \cdot e^{-x}$ und ihre Ableitung $f'(x) = -(x^2 + 2x) \cdot e^{-x}$.

a) **Bestimmen** Sie die Nullstellen von f.

b) **Berechnen** Sie $f''(x)$.

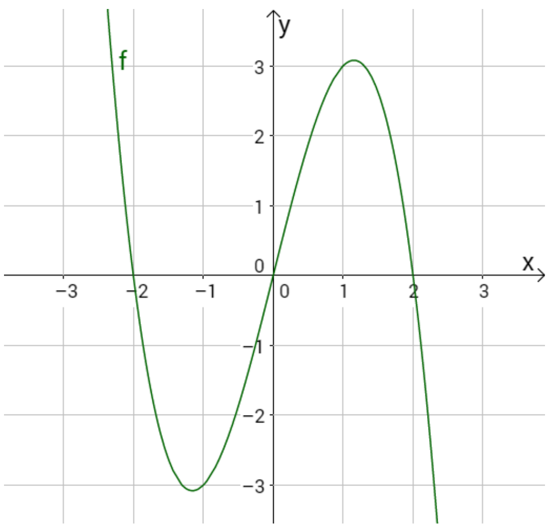
c) In den Abbildungen sind vier verschiedene Funktionsgraphen dargestellt, einer von ihnen gehört zur Funktion f. **Geben** Sie den entsprechenden Graphen an und **begründen** Sie Ihre Entscheidung.



5 Punkte

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 4x$, $x \in \mathbb{R}$ (siehe Abbildung).



a) **Zeigen** Sie rechnerisch, dass x = – 2 eine Nullstelle von f ist.

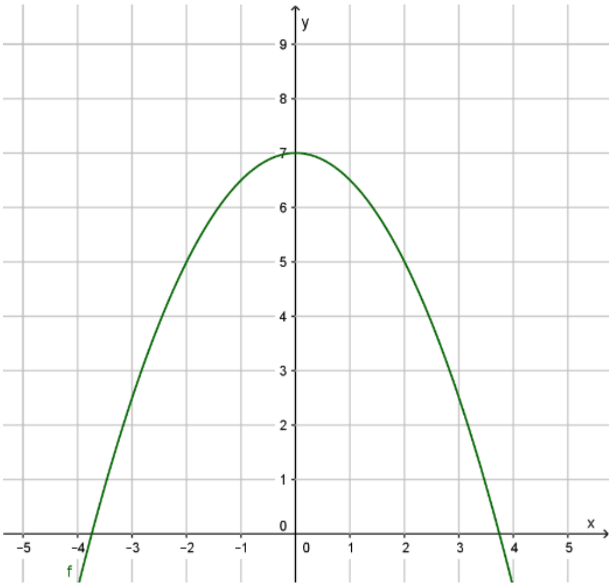
b) **Begründen** Sie anhand der Abbildung, dass gilt:

$\int_0^2 f(x)\,dx > 0.$

c) **Berechnen** Sie $\int_0^2 f(x)\,dx$

5 Punkte

Aufgabe 3



Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 7$, $x \in IR$

(siehe Abbildung).

Die Tangente an den Graph von f an der Stelle $x = 2$ wird mit t bezeichnet.

a) **Weisen** Sie **nach**, dass die Tangente t durch die Funktionsgleichung $t(x) = -2x + 9$ beschrieben werden kann.

b) Der Graph der Tangente g und die beiden Koordinatenachsen schließen ein Dreieck ein.

Ermitteln Sie durch Rechnung den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

5 Punkte

Aufgabe 4

Gegeben sind die Punkte $A(1|0|0)$, $B(0|2|0)$, $C(1|0|2)$ und $D(2|-2|2)$.

a) **Zeigen** Sie, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm, aber kein Rechteck ist.

b) Gesucht wird ein rechtwinkliges Dreieck ABE, wobei der rechte Winkel beim Punkt B liegen soll. **Bestimmen** Sie Koordinaten des Punktes E für ein derartiges Dreieck.

5 Punkte

Aufgabe 1 – Bunkern

Das Betanken von Containerschiffen mit Schweröl wird als Bunkern bezeichnet. Dabei pumpt ein Tankschiff mehrere Stunden lang vorgeheiztes Schweröl in den Tank des Containerschiffes. In dieser Aufgabe wird die Tankgeschwindigkeit genauer untersucht, d.h. die Menge an Schweröl in Tonnen, die pro Stunde in ein Containerschiff gepumpt wird. Je nach Öltemperatur und Pumpleistung ändert sich diese Tankgeschwindigkeit.

a) Im Folgenden soll die sich ändernde Tankgeschwindigkeit beim Bunkern modelliert werden.

Bestimmen Sie dazu eine ganzrationale Funktion g dritten Grades, wobei $g(t)$ die Tankgeschwindigkeit in Tonnen Schweröl pro Stunde und t die Zeit in Stunden nach Beginn angibt. Über die Tankgeschwindigkeit ist Folgendes bekannt: Zu Beginn des Tankvorgangs ist die Tankgeschwindigkeit 1600 Tonnen pro Stunde. Eine Stunde nach Beginn nimmt die Tankgeschwindigkeit am stärksten zu. Vier Stunden nach Beginn ist die Tankgeschwindigkeit mit 1920 Tonnen pro Stunde am größten.

(8 Punkte)

Die Funktion f mit

$$f(t) = 4t^3 - 60t^2 + 300t + 1500 \text{ für } t \in \mathbb{R} \text{ und } 0 \le t \le 6$$

modelliert die Tankgeschwindigkeit eines anderen, sechs Stunden dauernden Bunkerns, wobei die Tankgeschwindigkeit $f(t)$ in Tonnen Schweröl pro Stunde und die Zeit t in Stunden nach Beginn des Bunkerns angegeben ist. Der Graph von f ist im Anhang abgebildet.

b) **Berechnen** Sie die Tankgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$.

Geben Sie passende Werte für die Markierungsstriche der y-Achse im Anhang **an**.

Weisen Sie **nach**, dass der Graph von f einen Sattelpunkt besitzt. **Berechnen** Sie die Koordinaten dieses Sattelpunktes und **zeichnen** Sie diesen in den vorgegebenen Graphen im Anhang ein.

Begründen Sie nur mit Hilfe der Informationen aus diesem Aufgabenteil, dass der Graph der Ableitungsfunktion f' einen Extrempunkt besitzen muss.

Beurteilen Sie die folgenden beiden Aussagen:

1) Die Tankgeschwindigkeit nimmt in den sechs Stunden zu keinem Zeitpunkt ab.
2) Die Zunahme der Tankgeschwindigkeit verringert sich immer mehr im Laufe der sechs Stunden.

(14 Punkte)

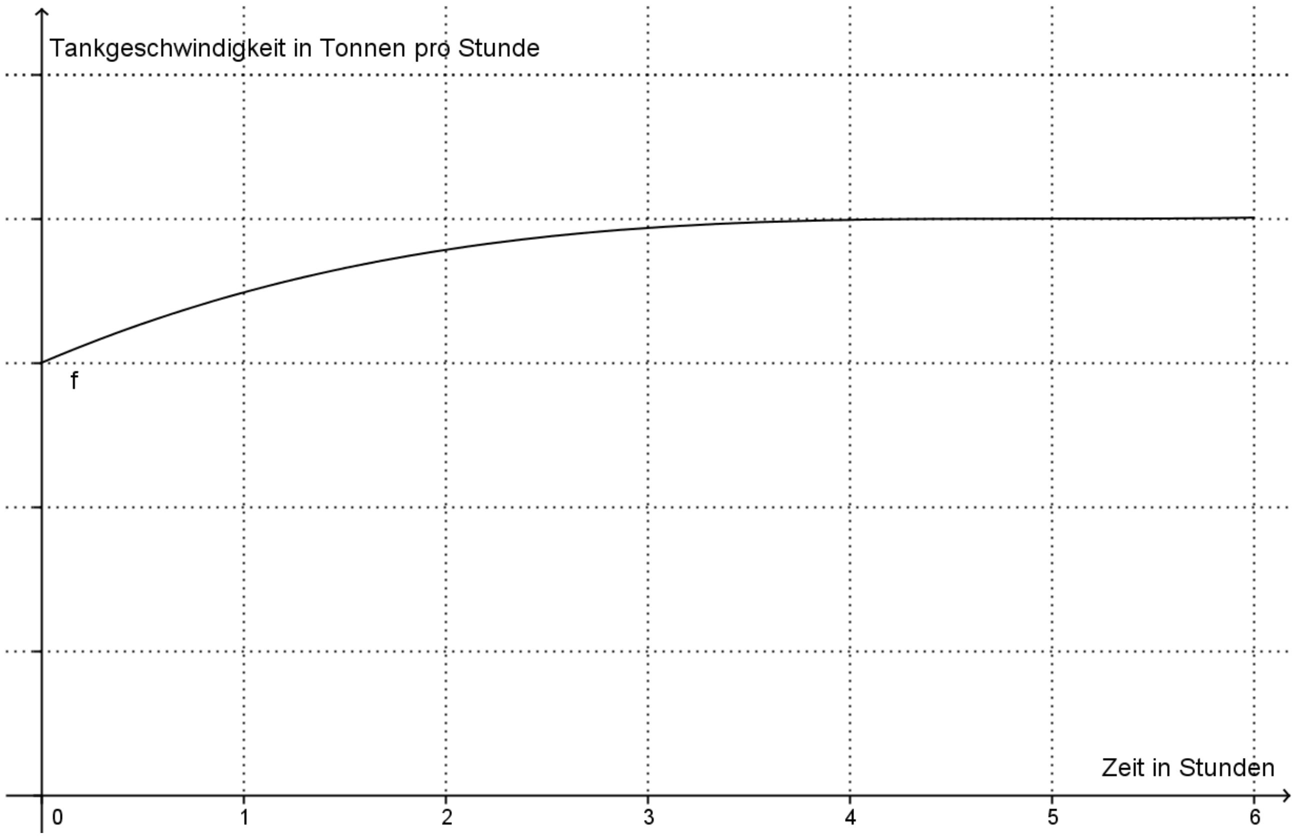
c) Im Folgenden geht es um die Kosten für eine Tankfüllung.

Bestimmen Sie den Wert des Integrals $A = \int_0^6 f(t)\,dt$ unter Angabe einer Stammfunktion.

Bestimmen Sie die Kosten für diese Tankfüllung, berücksichtigen Sie dabei, dass eine Tonne Schweröl ca. 460 Euro kostet.

(3 Punkte)

Anhang


Tankgeschwindigkeit in Tonnen pro Stunde
f
Zeit in Stunden
0
1
2
3
4
5
6

Aufgabe 2 – Sprachforschung

Viele Begriffe der deutschen Sprache wurden von arabischen Begriffen abgeleitet oder übernommen, wie zum Beispiel die Begriffe *Algebra* und *Zucker*. Sie werden als *Arabismen* bezeichnet. Die Sprachforschung untersucht unter anderem, wann und wie viele Begriffe unserer Sprache aus anderen Sprachen übernommen wurden.

Betrachtet man die Anzahl der Arabismen in der deutschen Sprache seit dem Anfang des 15. Jahrhunderts so erhält man folgende Daten:

Zeit in Jahrhunderten seit dem Anfang des 15. Jahrhunderts	0	1	2	3	4	5	6
Anzahl der Arabismen	38	52	84	110	131	145	150

a) In einer ersten Modellierung soll ein exponentielles Wachstum mit der Funktion f mit $f(t)=c\cdot e^{k\cdot t}$ angenommen werden, wobei t die Zeit in Jahrhunderten und $f(t)$ näherungsweise die Anzahl der Arabismen in der deutschen Sprache angeben. $t=0$ entspricht dem Anfang des 15. Jahrhunderts.

- **Bestimmen** Sie die Parameter c und k mithilfe der Daten des 15. und 18. Jahrhunderts. **Runden** Sie Ihre Ergebnisse auf vier Nachkommastellen und geben Sie die Funktion f an.
- **Bestimmen** Sie mithilfe Ihrer Modellierung die Wachstumsrate der Anzahl der Arabismen.

(6 Punkte)

Für die weiteren Aufgabenteile soll als zweite Modellierung die Funktion g mit

$$g(t)=160-159\cdot e^{-0{,}4254\cdot t},\ t\geq 0$$

genutzt werden, wobei t die Zeit in Jahrhunderten und $g(t)$ näherungsweise die Anzahl der Arabismen angeben. $t=0$ entspricht wieder dem Anfang des 15. Jahrhunderts.

b)

- **Bestimmen** Sie die Anzahl der Arabismen Anfang des 15. und des 21. Jahrhunderts.
- **Bestimmen** Sie, in welchem Jahrhundert die Anzahl der Arabismen auf 131 angewachsen ist.
- **Zeichnen** Sie den Graphen von g für $0\leq t\leq 6$ in das beiliegende Koordinatensystem. Die Originaldaten aus der obigen Tabelle sind als Punkte eingetragen.
- **Bestimmen** Sie die prozentualen Abweichungen der Funktionswerte von den Daten für Anfang des 15. und 21. Jahrhundert. **Ergänzen** Sie diese in der unteren Tabelle:

Zeit in Jahrhunderten seit dem Anfang des 15. Jahrhunderts	0	1	2	3	4	5	6
g(t)		56	92	116	131	141	
Wert der prozentualen Abweichung in %		7,7	9,5	5,5	0	-2,8	

- **Beurteilen** Sie mithilfe der prozentualen Abweichungen, wie genau die Funktion g an die Daten angepasst ist.
- **Bestimmen** Sie $\lim\limits_{t\to\infty} g(t)$.
- **Vergleichen** und **bewerten** Sie die langfristige Entwicklung der Anzahl der Arabismen der Modellierungen g und f.

(9 Punkte)

c)

- **Zeigen** Sie unter Verwendung der Ableitungsregeln, dass für g' gilt:

$$g'(t) \approx 67{,}64 \cdot e^{-0{,}4254 \cdot t},\ t \geq 0\,.$$

- **Bestimmen** Sie $g'(2)$ und $g'(4)$.
- **Interpretieren** Sie die Werte im Sachzusammenhang.

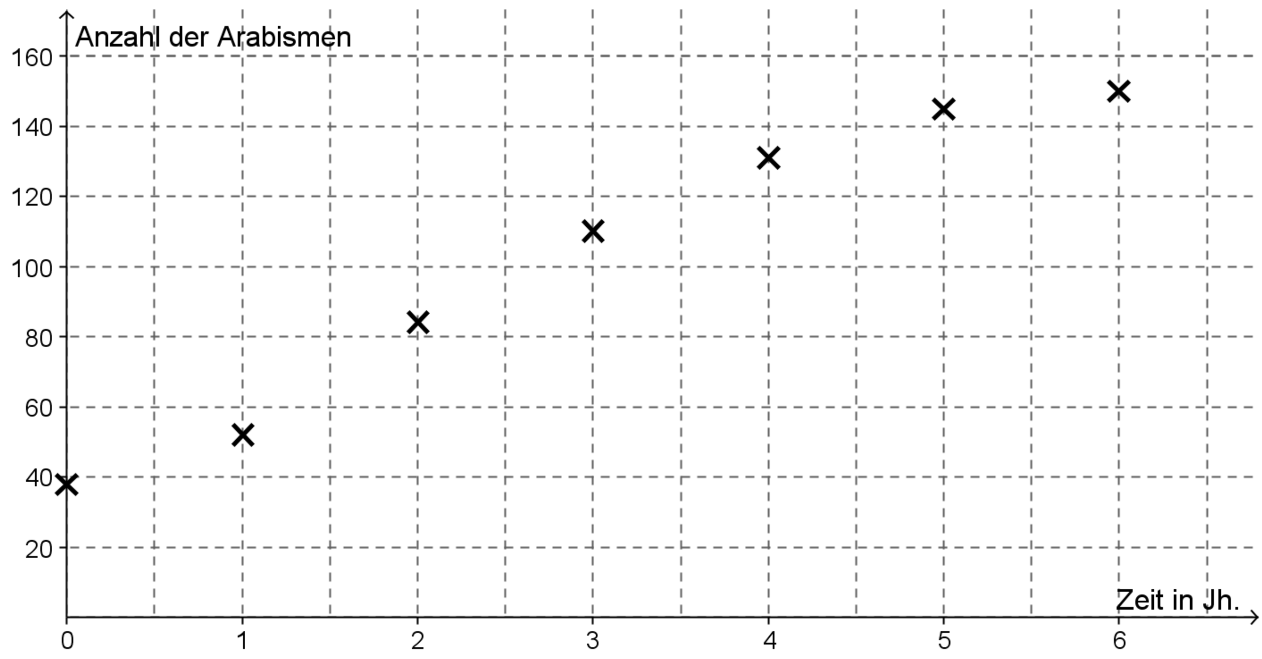
(4 Punkte)

d)

- **Bestimmen** Sie $a = \frac{1}{6}\int_0^6 g'(t)dt$ mit Hilfe des Hauptsatzes der Integralrechnung.
- **Zeichnen** Sie in das Koordinatensystem eine Gerade h, die durch die Punkte $P\left(0 \middle| g(0)\right)$ und $Q\left(6 \middle| g(6)\right)$ verläuft.
- **Bestimmen** Sie die Funktionsgleichung $h(t)$ dieser Geraden.
- **Interpretieren** Sie den Wert von a im Sachzusammenhang und in Verbindung mit der Geradengleichung.

(6 Punkte)

Material:



Themenbereich Analytische Geometrie

Flugbahnen


Abbildung 1

Ein Fluglotse beobachtet die Flugbahnen verschiedener Flugzeuge. Die Flugbahnen verlaufen entlang von Geraden. Die Geschwindigkeit der Flugzeuge wird als konstant angenommen.

In allen Teilaufgaben ist der Parameter t die Zeit in Sekunden und alle Längen sind in Kilometern angegeben.
Die x_1x_2-Ebene beschreibt den Erdboden und die x_3-Achse zeigt senkrecht in Richtung Himmel.

a) Ein Flugzeug befindet sich zum Landen im Sinkflug. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Flugzeug im Punkt $P_1(20\,|\,0{,}1\,|\,1)$. Das Flugzeug bewegt sich pro Sekunde in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -0{,}06 \\ 0 \\ -0{,}006 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie die in 5 Sekunden zurückgelegte Strecke und **berechnen** Sie die Geschwindigkeit des Flugzeuges in km/h.

Geben Sie eine Parametergleichung der Geraden g **an**, entlang der die Flugbahn des Flugzeugs verläuft.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P_2, an dem sich das Flugzeug nach einer Minute befindet und **geben** Sie **an**, um wie viele Kilometer das Flugzeug in dieser Zeit gesunken ist.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes L, in dem das Flugzeug auf dem Erdboden aufsetzt.

Bestimmen Sie den Winkel hinsichtlich der x_1x_2-Ebene, mit dem der Sinkflug stattfindet.

(10 Punkte)

Im Folgenden werden zwei Flugbahnen betrachtet (siehe Abbildung 2).

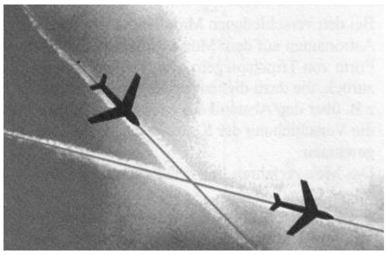


Abbildung 2

Eine Flugbahn verläuft entlang der Geraden $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}1 \\ 0{,}01 \end{pmatrix}$

und die andere Flugbahn entlang der Geraden $k\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Auch hier stellen die Parameter r und s die Zeit in Sekunden dar und alle Längen sind in Kilometern angegeben. Die Richtungsvektoren stellen die in einer Sekunde zurückgelegte Strecke dar.

b) **Zeigen** Sie, dass der Punkt $Q(20\,|\,10\,|\,9)$ der Schnittpunkt der beiden Flugbahnen ist.

Geben Sie **an**, unter welchen Voraussetzungen die beiden Flugzeuge in Q nicht kollidieren.

Aus Gründen der Flugsicherheit ordnet der Fluglotse einen Abstand der Flugbahnen an. Dazu soll das Flugzeug entlang der Geraden h seinen Steigflug verringern.

Bestimmen Sie einen veränderten Richtungsvektor der Flugbahn h so, dass das Flugzeug für $r = 100$ genau 500 m unterhalb des Punktes Q vorbeifliegt.

(7 Punkte)

Das Flugzeug, dessen Flugbahn entlang der Geraden h mit $h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}1 \\ 0{,}01 \end{pmatrix}$ verläuft, fliegt auf eine Gewitterfront zu. Die Gewitterfront wird durch das Dreieck ABC mit den Punkten $A(30\,|\,10\,|\,0)$, $B(60\,|\,40\,|\,0)$ und $C(45\,|\,25\,|\,10)$ beschrieben. Das Dreieck liegt in der Ebene E.

c) **Begründen** Sie, dass die Ebene E durch die Parametergleichung

$$E\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden kann.

Bestimmen Sie den Schnittpunkt S der Geraden h mit der Ebene E.

(8 Punkte)